.... **3A-Z**

Lineare Algebra I: Probeklausur

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wintersemester 2021

- **Die Klausur dauert 2 Stunden. Sie besteht aus 6 Aufgaben. Pro Aufgabe sind 10 Punkte zu erwerben.**
- Öffnen Sie den Klausurbogen erst, wenn der Klausurbeginn angesagt wurde!
- Das Tragen einer medizinischen Maske oder einer FFP2-Maske ist während der gesamten Klausur vorgeschrieben.
- Es sind keine Hilfsmittel (Taschenrechner, Mitschriften, Notizen, Telefonjoker etc.) außer mechanischen Armbanduhren und Weckern zugelassen.
- Bitte prüfen Sie die folgenden Angaben und korrigieren Sie sie gegebenenfalls:

  Name: ....
  Matrikelnr.: ....

  Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis und Ihren Lichtbildausweis vor sich auf das Pult, damit Ihre Identität während der Klausur geprüft werden kann.
- Sie dürfen die einzelnen Blätter dieses Bogens zur Bearbeitung der Klausur trennen, solange Sie den folgenden Punkt beachten. Wenn Sie zusätzliche lose Seiten benötigen, geben Sie uns bitte ein Zeichen.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben jeweils auf den dafür vorgesehenen Seiten. Machen Sie auf jeder losen Seite klar erkenntlich, welche Aufgabe Sie lösen. Niederschriften, die nicht klar zugeordnet sind, werden nicht korrigiert.
- Fragen können Sie nur schriftlich stellen. Geben Sie uns dazu ein Zeichen. Wenn wir Ihre Frage zulassen, werden wir sie laut vorlesen und beantworten.
- Bitte lassen Sie Ihre Klausur am Ende der Bearbeitungszeit an Ihrem Sitzplatz liegen. Sie können einzelne Klausurbögen mit „bitte nicht werten“ kennzeichnen, aber nicht mitnehmen. Die Klausuraufgaben werden wir veröffentlichen.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punkte							/60

Aufgabe 1

Gegeben ist das folgende inhomogene reelle lineare Gleichungssystem mit einem Parameter t:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} & & & + & 3x_3 & & 9x_4 & & & = & 2 \\ 7x_1 & & & + & 3x_3 & + & 9x_4 & + & x_5 & = & -3 \\ & & & + & 1x_3 & & 3x_4 & & & = & t \\ -7x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 7x_4 & - & x_5 & = & 4 \end{array}$$

(a) Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A \mid \mathbf{b})$ für das System auf. Formen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix durch elementare Zeilenoperationen so in eine Matrix $(A' \mid \mathbf{b}')$ um, dass A' Zeilenstufenform hat.

(b) Bestimmen Sie alle reellen Werte $t \in \mathbb{R}$, für die das gegebene inhomogene System mindestens eine reelle Lösung besitzt.

(c) Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums $\mathcal{L}(A)$ des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems. Geben Sie ferner in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ den Lösungsraum $\mathcal{L}(A \mid \mathbf{b})$ des gegebenen inhomogenen Gleichungssystems an.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 2

Seien U und V die folgenden $\mathbb{R}$-Vektorräume:

$$U := \mathbb{R}^3 \qquad\qquad V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = 4y + 2z \right\}$$

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Tupel B und B' Basen sind von U, und dass die folgenden Tupel C und C' Basen sind von V:

$$B := \left(\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \qquad C := \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$B' := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad C' := \left(\begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(b) Sei $f\colon U \to V$ die lineare Abbildung, die bezüglich der Basen B und C gegeben ist durch die Matrix

$$_C M_B(f) = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $_{C'} M_{B'}(f)$, also die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen B' und C'.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 2
(Seite 7)

Aufgabe 2
(Seite 9)

Aufgabe 3

Kreuzen Sie in den folgenden acht Aufgabenteilen alle Aussagen an, die richtig sind.

Es ist pro Aufgabenteil mindestens eine *Aussage richtig. Manchmal sind* mehrere *Aussagen richtig. Als Gesamtpunktzahl erhalten Sie die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte und höchstens 10 Punkte.*

(1) Seien A, B Mengen. Eine **Abbildung** $f\colon A \to B$ ist eine Vorschrift, die

☐ jedem $a \in A$ genau ein Element $f(a) \in B$ zuordnet.

☐ jedem $a \in A$ mindestens ein Element $f(a) \in B$ zuordnet.

☐ jedem $b \in B$ ein Element $a \in A$ mit $f(a) = b$ zuordnet.

(2) Eine Relation $\sim$ auf einer Menge X ist **transitiv**, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt:

☐ $(x \sim y \text{ und } y \sim x) \Rightarrow x = y$

☐ $(x_1 \sim y_1 \text{ und } x_2 \sim y_2) \Rightarrow x_1 + y_1 \sim x_2 + y_2$

☐ $(x \sim y \text{ und } y \sim z) \Rightarrow x \sim z$

(3) Die folgenden Abbildungen sind **wohldefiniert**:

☐ $\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ (a, b) &\mapsto a + b \end{aligned}$

☐ $\begin{aligned} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ [n] &\mapsto (-1)^n \end{aligned}$

☐ $\begin{aligned} \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) &\to \mathbb{Q} \\ (a, b) &\mapsto \frac{a}{b} \end{aligned}$

(4) Eine Abbildung $f\colon A \to B$ zwischen den Mengen A und B nennen wir **bijektiv**, wenn gilt:

☐ Zu jedem $b \in B$ existiert genau ein $a \in A$ mit $f(a) = b$.

☐ Zu jedem $a \in A$ existiert genau ein $b \in B$ mit $f(a) = b$.

☐ Die Mengen A und B haben genau gleich viele Elemente.

(5) Seien X, Y, Z Mengen. Für die Komposition $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$ der Abbildungen $X \xrightarrow{g} Y$ und $Y \xrightarrow{f} Z$ gilt:

☐ Sind g und f injektiv, so ist auch $f \circ g$ injektiv.

☐ Ist g injektiv und f surjektiv, so ist $f \circ g$ bijektiv.

☐ Ist $f \circ g$ bijektiv, so ist g injektiv.

(6) Bekanntlich ist eine Gruppe $(G, *)$ **abelsch**, wenn die Verknüpfung $*$ kommutativ ist. Die folgenden Gruppen sind abelsch:

☐ $(\mathbb{Z}, +)$

☐ $\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$

☐ $(\mathbb{S}_3, \circ)$ (symmetrische Gruppe die dreistelligen Permutationen)

(7) Die folgenden Ringe sind Körper:

☐ $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$

☐ $\mathbb{R}[t]$ (Polynomring über $\mathbb{R}$ mit üblicher Addition und Multiplikation von Polynomen)

☐ $\mathrm{Mat}(2 \times 2; \mathbb{R})$ (Ring der reellen 2×2-Matrizen)

(8) Für jeden **Körper** K gilt:

☐ Es gibt unendlich viele verschiedene Elemente in K.

☐ Zu jedem $\alpha \in K \setminus \{0\}$ existiert ein $\beta \in K$ mit $\alpha \cdot \beta = 1$.

☐ Zu jedem $\alpha \in K$ existiert ein $\beta \in K$ mit $\beta^2 = \alpha$.

Aufgabe 4

Im Folgenden sei K ein Körper. Kreuzen Sie in den sieben Aufgabenteilen alle Aussagen an, die richtig sind.

Es ist pro Aufgabenteil mindestens eine *Aussage richtig. Manchmal sind* mehrere *Aussagen richtig. Als Gesamtpunktzahl erhalten Sie die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte und höchstens 10 Punkte.*

---

(1) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ Wir können die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ auffassen als Vektorraum über den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. (Konvention: $0 \in \mathbb{N}$)
- ☐ Wir können die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ auffassen als Vektorraum über $\mathbb{Z}$.
- ☐ Wir können die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ auffassen als Vektorraum über den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

(2) Zwei Vektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ in einem Vektorraum sind genau dann **linear unabhängig**, wenn gilt:

- ☐ Für $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ folgt aus $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ bereits $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 = 0$.
- ☐ Für $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ folgt aus $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ bereits $\alpha_1 = 0$ oder $\alpha_2 = 0$.
- ☐ $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ und es gibt kein $\alpha \in K$ mit $\mathbf{v}_1 = \alpha \cdot \mathbf{v}_2$.

(3) Der Nullvektorraum $\{\mathbf{0}\}$ über $\mathbb{R}$

- ☐ besitzt keine Basis.
- ☐ besitzt als Basis die leere Familie.
- ☐ besitzt als Basis die Familie, die nur aus dem Nullvektor $\mathbf{0}$ besteht.

(4) Sei V ein Vektorraum über K. Eine Familie von Vektoren $\mathcal{B} := (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ aus V bildet genau dann eine **Basis** von V, wenn gilt:

- ☐ $\mathcal{B}$ ist ein Erzeugendensystem von V und $\dim(V) = 3$.
- ☐ Zu jedem Vektor $\mathbf{v} \in V$ existiert genau ein Tripel $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in K^3$, sodass gilt: $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3$.
- ☐ $\mathcal{B}$ ist ein Erzeugendensystem von V, und $\mathbf{v}_i \neq 0$ für $i \in \{1, 2, 3\}$.

(5) Die folgenden Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2; \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ sind invertierbar:
Achtung: Koeffizienten in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(6) Eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; K)$ ist genau dann invertierbar, wenn gilt:

- ☐ $\mathrm{rang}(A) = n$.
- ☐ $\det(A) = 0$.
- ☐ Die Zeilen von A sind linear unabhängig.

(7) Eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ vom Rang $\mathrm{rang}(A) < n$

- ☐ besitzt 0 als Eigenwert.
- ☐ besitzt keine Eigenwerte.
- ☐ besitzt höchstens $n - 1$ verschiedene Eigenwerte.

Aufgabe 5

Die Menge der Abbildungen $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ ist bekanntlich bezüglich der folgendermaßen definierten „punktweisen“ Addition und Skalarmultiplikation ein $\mathbb{R}$-Vektorraum:

$$\left.\begin{aligned}(f+g)(x) &:= f(x)+g(x)\\ (s\cdot f)(x) &:= sf(x)\end{aligned}\right\}\ \text{für } f,g \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}$$

Seien für $n \in \mathbb{Z}$ die folgenden Abbildungen $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben:

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x < n \\ 1 & \text{falls } x \geqslant n \end{cases}$$

(a) Ist die Menge $\{f_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ linear unabhängig in $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

(b) Ist die Menge $\{f_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

Belegen Sie die Richtigkeit Ihrer Antwort jeweils durch einen Beweis!

Sie können jeden Satz der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form (d. h. unabhängig von der vorliegenden Aufgabenstellung) wiedergeben.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 5
(Seite 14)

Aufgabe 5
(Seite 15)

Aufgabe 6
Zwei Matrizen $A, A' \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(m \times n)$ heißen **äquivalent**, geschrieben $A \sim A'$, wenn es invertierbare Matrizen $S \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(m \times m)$ und $T \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ gibt, sodass gilt:

$$A' = S^{-1}AT$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Relation $\sim$ auf $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(m \times n)$ tatsächlich eine Äquivalenzrelation definiert.

(b) Wie viele Äquivalenzklassen gibt es? Ihre Antwort sollte von n und m abhängen. Geben Sie für jede Äquivalenzklasse einen Repräsentanten an!

Sie können jeden Satz der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form (d. h. unabhängig von der vorliegenden Aufgabenstellung) wiedergeben.

Notieren Sie hier Ihre Lösung: